No.

Date

二項間
漸化式の一般的解法

i) $a_{n+1} = a_n + q$ 型
ii) $a_{n+1} = p \cdot a_n$ 型
iii) $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型
} i)〜iii)は基本型

iv) $a_{n+1} = p \cdot a_n + q$ 型

v) $a_{n+1} = p \cdot a_n + f(n)$ 型 (ただし、$f(n) = t^n$ などでなければ一般化できない)

vi) $a_{n+1} = \dfrac{p \cdot a_n}{r \cdot a_n + p}$ 型

vii) $a_{n+1} = \dfrac{p \cdot a_n}{r \cdot a_n + s}$ 型

viii) $a_{n+1} = \dfrac{p \cdot a_n + q}{r \cdot a_n + s}$ 型 (特性方程式が異なる二解をもつ)
(実数解)

ix) $a_{n+1} = \dfrac{p \cdot a_n + q}{r \cdot a_n + s}$ 型 (特性方程式が重解をもつ)

i) 公差 q の等差数列 ; $a_{n+1} = a_n + q$

例) $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 2$ $\{a_n\} = 5, 7, 9, \cdots$

初項5, 公差2. よって $a_n = 2(n-1) + 5$ $\therefore$ $\underline{a_n = 2n+3}$

ii) 公比 p の等比数列 ; $a_{n+1} = p \cdot a_n$

例) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n$ $\{a_n\} = 2, 4, 8, \cdots$

初項2, 公比2 よって $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ $\therefore$ $\underline{a_n = 2^n}$

iii) 階差数列が $f(n)$; $a_{n+1} = a_n + f(n)$

例) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2n$ $\{a_n\} = 3, 5, 9, 15, \cdots$

$n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2n$

$= 3 + n(n-1)$

$= n^2 - n + 3$ $n=1$ でも成立するので

$\underline{a_n = n^2 - n + 3 \ (n \geqq 1)}$

No.

Date

iv) $a_{n+1} = pa_n + q$ 型. $\rightarrow (a_{n+1} - \alpha) = p(a_n - \alpha)$

となる α を発見し、$a_n - \alpha$ の数列とみて

ii)で解く。

<発見の方法> 特性方程式 $\alpha = p\alpha + q$ を解く.

→導き方

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + q & \cdots ① \\ (a_{n+1} - \alpha) = p(a_n - \alpha) & \cdots ② \end{cases}$$ は同じ式

②を変型して $a_{n+1} = pa_n - p\alpha + \alpha$

これと①より $pa_n + q = pa_n - p\alpha + \alpha$

よって $\alpha = p\alpha + q$ を導くことができる。

例) $a_{n+1} = 3a_n - 2$ $a_1 = 3$ $\{a_n\} = 3, 7, 19, \cdots$

$\alpha = p\alpha + q$ を解くと $\alpha = 1$

よって $a_{n+1} - 1 = 3a_n - 2 - 1$

$\therefore (a_{n+1} - 1) = 3(a_n - 1)$

よって $\{a_n - 1\}$ は初項 2 ($\because a_1 - 1$) 公比 3 の等比数列.

よって $(a_n - 1) = 2 \cdot 3^{n-1}$ $\therefore \underline{a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 1}$

v) $a_{n+1} = p \cdot a_n + f(n)$ 型 (但し $f(n) = t^n$ 型) $(t \neq 0)$

$\rightarrow a_{n+1} = p \cdot a_n + t^n$ 両辺 t^{n+1} で割って

$\frac{a_{n+1}}{t^{n+1}} = \frac{p}{t}\left(\frac{a_n}{t^n}\right) + \frac{1}{t}$ $\left\{\frac{a_n}{t^n}\right\} = \{b_n\}$ とおけば

$b_{n+1} = \frac{p}{t} b_n + \frac{1}{t}$ となり iv)で解ける。

例) $a_{n+1} = 4a_n + 2^n$ $a_1 = 3$ $\{a_n\} = 3, 14, 60, \cdots$

$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{4}{2}\left(\frac{a_n}{2^n}\right) + \frac{1}{2}$ $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\} = \{b_n\}$ とおくと

$b_{n+1} = 2b_n + \frac{1}{2}$ $\alpha = p\alpha + q$ を解いて $\alpha = -\frac{1}{2}$

よって $(b_{n+1} + \frac{1}{2}) = 2(b_n + \frac{1}{2})$

よって $\{b_n + \frac{1}{2}\}$ は初項 2 ($\because \frac{a_1}{2^1} + \frac{1}{2}$), 公比 2 の等比数列.

より $b_n + \frac{1}{2} = 2 \cdot 2^{n-1}$ $\therefore b_n = 2^n - \frac{1}{2}$

よって $\frac{a_n}{2^n} = 2^n - \frac{1}{2}$ $\therefore \underline{a_n = 2^{2n} - 2^{n-1}}$

vi) $a_{n+1} = \dfrac{p \cdot a_n}{r \cdot a_n + p}$ 型 → 両辺逆数とって $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{r}{p}$

ここで $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\} = \{b_n\}$ とおくと

$b_{n+1} = b_n + \dfrac{r}{p}$ となり、i)で解ける。

例) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n+1}$ $a_1 = 1$ $\{a_n\} = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7} \cdots$

$a_n \neq 0$ が常に成立するので …注

逆数とって $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 2$ ここで $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\} = \{b_n\}$ とおけば

$b_{n+1} = b_n + 2$ よって $b_n = 2n-1$

よって $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$

vii) $a_{n+1} = \dfrac{p \cdot a_n}{r \cdot a_n + s}$ 型 → vi)と同様にすると $b_{n+1} = \dfrac{s}{p} a_n + \dfrac{r}{p}$ となり、iv)で解ける。

例) $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{3a_n+1}$ $a_1 = 1$ $\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{2}{11}, \cdots$

$a_n \neq 0$ が常に成立するので …注

逆数とって $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_n}\right) + \dfrac{3}{2}$ ここで $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\} = \{b_n\}$ とおくと

$b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{3}{2}$ $\alpha = p\alpha + q$ を解いて $\alpha = 3$

よって $(b_{n+1} - 3) = \frac{1}{2}(b_n - 3)$

よって $\{b_n - 3\}$ は初項 -2, $(\because \frac{1}{a_1} - 3)$ 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列。

よって $b_n - 3 = -2 \cdot \dfrac{1}{2^{n-1}} = -2^{2-n}$

$\therefore b_n = 3 - 2^{2-n}$

よって $a_n = \dfrac{1}{3 - 2^{2-n}}$

注 vi) vii)は、逆数をとるので、(分母) $\neq 0$ を示す必要性がある。