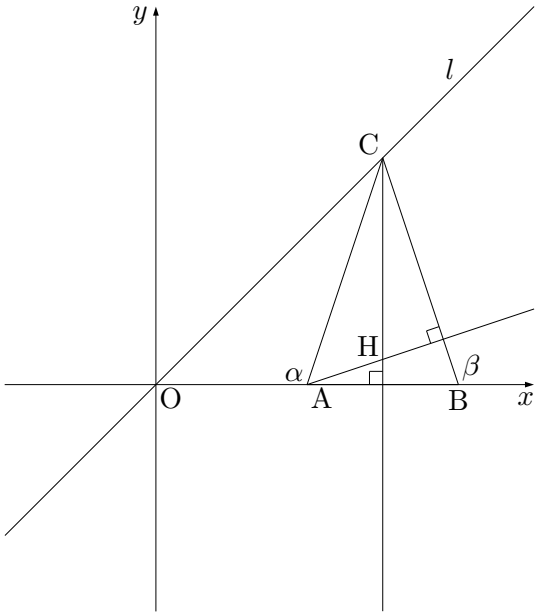
- 垂心の軌跡第２回は前回の △ABC において $l \not\parallel BC$ の場合その１です。

問２

△ABC において、C を通る直線を l とする。l の直線 AB との交点を O とする。O は A を基準としてて B と反対側にあるものとする。C が l 上を動くとき、△ABC の垂心 H の軌跡の概形を平面上に図示しなさい。

- 要は下のような図です。$l;\ y = ax$、$A(\alpha, 0)$、$B(\beta, 0)$ とおいています。



: $\boxed{\text{解}}$ $A(\alpha, 0)$、$B(\beta, 0)$、$l;\ y = ax$、$C(n, an)$ とおける。(ただし $\beta > \alpha > 0$、$a > 0$、$n \neq 0$)

CH; $x = n$ であることがわかる。

また、AH は BC に垂直だから、AH の傾きは、$\dfrac{\beta - n}{na}$ より、

AH; $y = \dfrac{\beta - n}{na}(x - \alpha)$

ここで、H は AB と CH の交点だから、$y = \dfrac{\beta - n}{na}(x - \alpha)$ に $x = n$ を代入して、

$y = -\dfrac{(n - \alpha)(n - \beta)}{na}$ 　(ただし $n \neq 0$)

ここで、点 C は原点を除き l 上のすべての点をとりうるから、H の軌跡は、

$y = -\dfrac{(x - \alpha)(x - \beta)}{xa}$ 　$(x \neq 0)$

ここで、$f(x) = -\dfrac{(x - \alpha)(x - \beta)}{xa}$ 　$(x \neq 0)$ とおく。

これを展開してやると、

$f(x) = -\dfrac{x}{a} + \dfrac{\alpha+\beta}{a} - \dfrac{\alpha\beta}{ax} \quad (x \neq 0)$

よって

$f'(x) = -\dfrac{1}{a} + \dfrac{\alpha\beta}{x^2 a}$

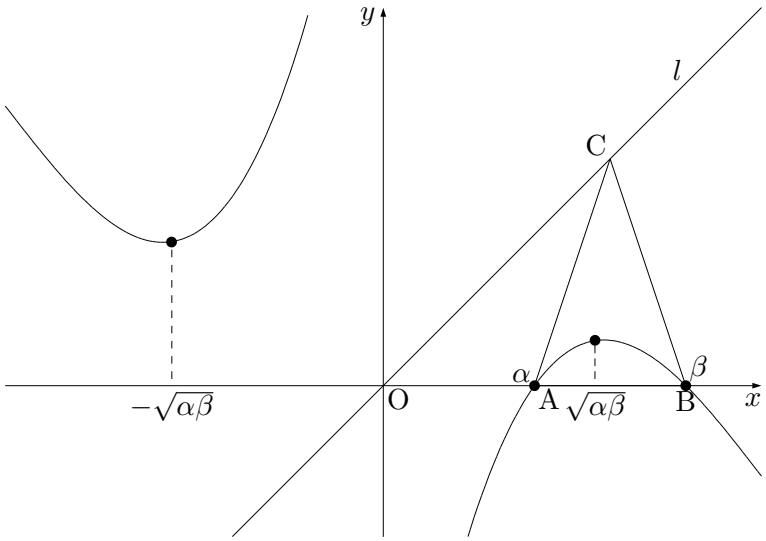
より

$f'(x) = -\dfrac{1}{a}(\dfrac{\sqrt{\alpha\beta}}{x} + 1)(\dfrac{\sqrt{\alpha\beta}}{x} - 1)$

よって増減表は以下。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\alpha\beta}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\alpha\beta}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よってグラフは下図。



以上より、上図の双曲線 答

- 今回は直線 l が △ABC の外部を通る場合について扱いました。
- 次回は直線 l が △ABC の内部を通る場合について扱います。

垂心の軌跡はおもしろい。