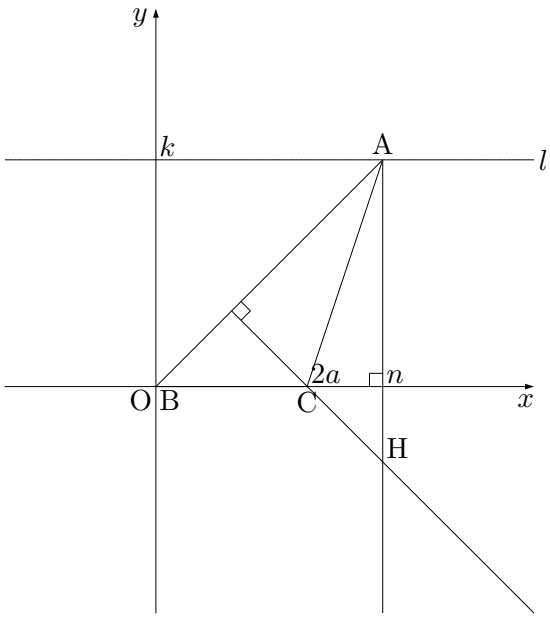
- 初等幾何において、放物線を目にする機会は少ないものです。その放物線が出てくる幾何の問題を紹介したいと思います。

問 1

△ABC において、BC に平行で、A を通る直線を l とする。A が l 上を動くとき、△ABC の垂心 H の軌跡を求めなさい。

- 幾何的に解くのは面倒なので座標を使って求めてしまいましょう。

: 解 $A(n,k)$、$B(0,0)$、$C(2a,0)$、$l; y=k\ (a,k>0)$ とおける。



- AH; $x=n$ であることがわかる。

  また、CH は AB に垂直だから、CH の傾きは $-\dfrac{n}{k}$ より、

  CH; $y=-\dfrac{n}{k}(x-2a)$

  ここで、H は AB と CH の交点だから、$y=-\dfrac{n}{k}(x-2)$ に $x=n$ を代入して、

  $y=-\dfrac{n(n-2a)}{k}$

  ここで、点 A は l 上のすべての点をとりうるから、H の軌跡は、

  $y=-\dfrac{x(x-2a)}{k}$

  これは (0,0)、$(2a,0)$ を代入して成立するから、点 B,C を通る。

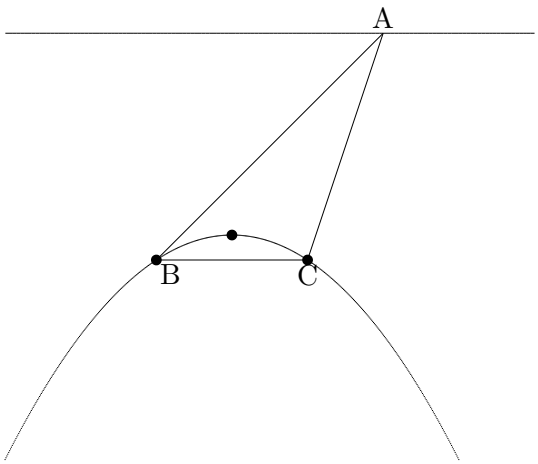
  また、これを変形して、

  $y=-\dfrac{1}{k}(x-a)^2+\dfrac{a^2}{k}$

となるから、放物線の頂点はBCの垂直二等分線上で、そのときAもBCの垂直二等分線上となる。

以上より、

AがBCの垂直二等分線上にあるときの垂心を頂点とした、点B,Cを通る放物線となる 答



- 直線lがBCに平行でないときは、場合分けが少し面倒ですがすぐできます。これは次回から数回にわたって扱います。
- とりあえず、垂心の軌跡はおもしろい形を描く事が多いので色々確かめてみてはいかがでしょうか。

垂心の軌跡はおもしろい。