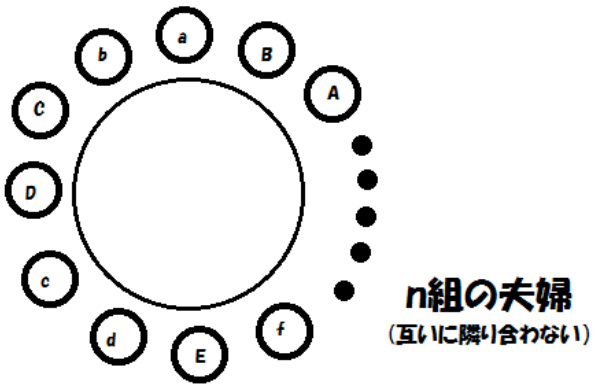
- 学校の先生に頂いた問題です。解けなかったら夫婦をあきらめますか、ということでした・・・。

【問題】



n (n は自然数) 組の夫婦が互いに隣り合わないように円卓に座る。

(1) $n = 1, 2$ のときの順列を求めよ。

(2) $n = 3$ のときの順列を求めよ。

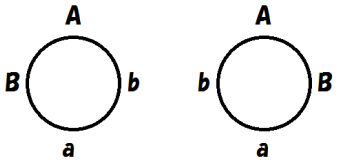
(3) 一般の n についての順列を求めよ。

(4) $n = 100$ のときの順列を求めよ。

解答

(1) $n = 1$ のときは、0 通りです。

$n = 2$ のときは、2 通りです。
1 組の夫婦を A と a、もう一組を B と b などと表せば、次図の 2 通りです。

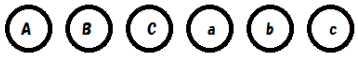


(2) 次に、$n = 3$ のときを考えます。

Aa、Bb、Cc の 3 組の夫婦をまず一列に並べて、それを円周上に並べることにします。

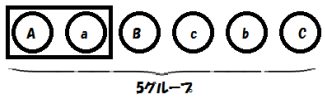
$\boxed{1}$ まず、Aa、Bb、Cc が隣り合う合わないにかかわらず並ぶ方法は、6 人ですから、

6!(通り) です。



$\boxed{2}$ 次に、Aa、Bb、Cc のうち少なくとも一組が隣り合う並び方は、隣り合う一組の選び方が ${}_3\mathrm{C}_1$ 通り、隣り合う一組の中での並び順が 2 通り、さらに全体の並び順が 5! 通りで、

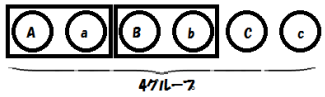
${}_3\mathrm{C}_1 \times 2^1 \times 5!$(通り) であるように思われます$\cdots$。が、



$\boxed{3}$ しかし$\boxed{2}$では、Aa が隣り合うとした並べ方の中に、Bb や Cc も隣り合うものが紛れ込んでいて、Aa、Bb ともに隣り合うもの、Bb、Cc ともに隣り合うもの、Cc、Aa ともに隣り合うもの、が二回数えられてしまっていますから、その数えすぎた分を考えることにします。

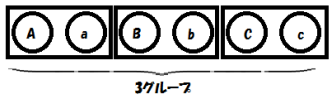
ここで、少なくとも二組隣り合う並び方は、隣り合う二組の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2$ 通り、隣り合う二組の中での並び順が 2^2 通り、さらに全体の並び順が 4! 通りで、

${}_3\mathrm{C}_2 \times 2^2 \times 4!$(通り) であるように思われます。



$\boxed{4}$ 同じようにして、三組隣り合う並び方を計算します。隣り合う三組の選び方が ${}_3\mathrm{C}_3$ 通り、隣り合う三組中での並び順が 2^3 通り、更に全体の並びたかが 3! 通りで、

${}_3\mathrm{C}_3 \times 2^3 \times 3!$(通り) です。

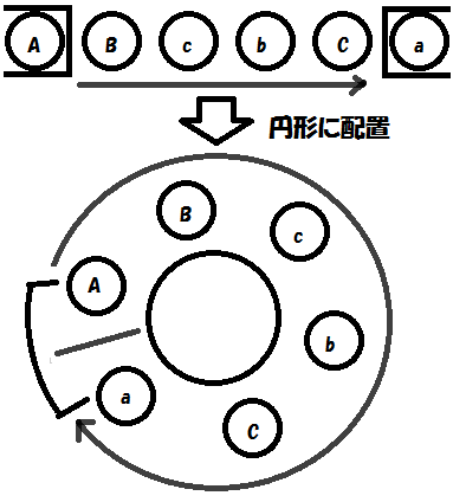


以上$\boxed{1}$から$\boxed{4}$より、一列に並べた時に Aa、Bb、Cc ともに隣り合わない並べ方は、

$$
\begin{aligned}
&6! - {}_3\mathrm{C}_1 \times 2^1 \times 5! + {}_3\mathrm{C}_2 \times 2^2 \times 4! - {}_3\mathrm{C}_3 \times 2^3 \times 3! \\
&= {}_3\mathrm{C}_0 \times (-2)^0 \times 6! + {}_3\mathrm{C}_1 \times (-2)^1 \times 5! + {}_3\mathrm{C}_2 \times (-2)^2 \times 4! + {}_3\mathrm{C}_3 \times (-2)^3 \times 3! \\
&= \sum_{k=0}^{3} (-2)^k \cdot {}_3\mathrm{C}_k \cdot (6-k)!
\end{aligned}
$$

この一列での並べ方を円順列にもそのまま適用できればよいのですが、そういうわけにもいきません。

具体的には、一列で並べたとき、次図のような形になっていたら、一列で並べたときには隣り合っていることになりませんが、円状に配置したときには隣り合っていることになってしまいます。



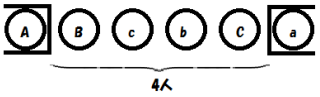
つまり、一列で並べたとき、両端に一組の夫婦がきて、かつそれ以外の夫婦が隣り合わない場合を、$\boxed{1}$から$\boxed{4}$の数え方では引き忘れているわけです。

それが何通りになるのか、求めてみます。

① まず、両端に来る夫婦の決め方は 3 通り、その 2 人の並べ方は、2 通りです。

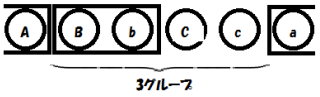
② 次に、両端以外の 4 人が隣り合うあわないに関わらず並ぶ方法は、

4!(通り) です。



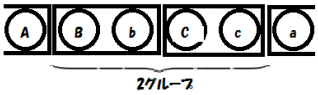
③ 両端にこない夫婦のうち、少なくとも一組が隣り合う並び方は、となりあう一組の選び方が ${}_2C_1$ 通り、隣り合う一組の中での並び方が 2 通り、さらに両端以外の並べ方が 3! 通りで、

${}_2C_1 \times 2^1 \times 3!$(通り) です。



④ 同じようにして、両端に来ない夫婦ともに隣り合う並び方は、隣り合う二組の選び方が ${}_2\mathrm{C}_2$ 通り、隣り合う一組の中での並び方が 2^2 通り、さらに両端以外の並べ方が $2!$ 通りで、

$${}_2\mathrm{C}_2 \times 2^2 \times 2!(\text{通り})$$ です。



①から④より、両端に一組の夫婦が来て、かつそれ以外の夫婦が隣り合わない並べ方は、

$$\begin{aligned}
&2 \times 3 \times (4! - {}_2\mathrm{C}_1 \times 2^1 \times 3! + {}_2\mathrm{C}_2 \times 2^2 \times 2!) \\
&= 2 \times 3 \times \left\{ {}_2\mathrm{C}_0 \times (-2)^0 \times 4! + {}_2\mathrm{C}_1 \times (-2)^1 \times 3! + {}_2\mathrm{C}_2 \times (-2)^2 \times 2! \right\} \\
&= 2 \times 3 \times \left\{ \sum_{k=0}^{2} (-2)^k \cdot {}_2\mathrm{C}_k \cdot (4-k)! \right\}
\end{aligned}$$

以上の $\boxed{1}$ から $\boxed{4}$、①から④の数え方により、めでたく円順列上で、3 組の夫婦がともに隣り合わない並べ方の総数を求めることができます。

つまり、

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{3} (-2)^k \cdot {}_3\mathrm{C}_k \cdot (6-k)! - 2 \times 3 \times \left\{ \sum_{k=0}^{2} (-2)^k \cdot {}_2\mathrm{C}_k \cdot (4-k)! \right\}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3} \sum_{k=0}^{3} (-2)^k \cdot {}_3\mathrm{C}_k \cdot (6-k)! - \sum_{k=0}^{2} (-2)^k \cdot {}_2\mathrm{C}_k \cdot (4-k)!$$

これを計算すると、

32(通り)　となります。

(3)　同じようにして、集合と排除の論理から議論すると、一般の n 組の夫婦において、どの一組も隣り合わないように円卓に座らせる方法は、

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \cdot {}_n\mathrm{C}_k \cdot (2n-k)! - \sum_{k=0}^{n-1} (-2)^k \cdot {}_n\mathrm{C}_k \cdot \{2(n-1)-k\}! \ (\text{通り}) & (n \geqq 2) \\
0 \ (\text{通り}) & (n = 1)
\end{cases}$$

となります。

(4)　(3) の式において、$n = 100$ を代入すれば、答えが出るのですが $\cdots$。

$$\frac{1}{2 \cdot 100} \sum_{k=0}^{100} (-2)^k \cdot {}_{100}\mathrm{C}_k \cdot (2 \cdot 100 - k)! - \sum_{k=0}^{99} (-2)^k \cdot {}_{99}\mathrm{C}_k \cdot (99 - k)! \quad (\text{通り})$$

この値を実際に計算してみようとしましたが、私の持っている関数電卓ではメモリがオーバーフローして、計算することができませんでした。

そこで、Windows のフリーソフトである、「多倍長電卓 LM」をもちいて、以下のようなマクロを作成して計算しました。

```
// 夫婦の並べ方の関数の片割れ
function halffufu( x, y )
{
    int i;
    if( x == -1 ){
        return 0;
    } else {
        i = (-2)^x * y! / x! / (y - x)! * (2 * y - x)! + halffufu ( x - 1, y );
        return i;
    }
}

// 夫婦の並べ方の関数
function fufu( x )
{
     int i;
     if( x == 1 ){
         return 0;
     } else
     if ( x == 2 ){
         return 2;
     } else {
         i = halffufu( x, x ) / 2 / x - halffufu ( x - 1 , x - 1 );
         return i;
     }
}
```

これでもって計算してやると、

```
>fufu(100)
  =
```

```
+                                   143 97435 91242 30252 35390
  00363 32778 55307 38460 98770 69381 04583 49299 24453 98108
  00501 13805 58930 65095 77700 15400 64140 27629 13600 64204
  35614 80324 08338 94773 49088 74710 63487 49879 50221 28572
  26289 58182 69677 65002 35617 02684 07314 44201 18482 06548
  22006 56946 07257 43942 88201 59601 86877 78050 26672 41196
  40938 01010 03888 97470 09155 48494 13001 18695 21687 89279
  49353 72663 72182 08898 76004 86400 00000 00000 00000 00000.
```

となりまして、$n = 100$ のとき、答えは、

```
                                   143 97435 91242 30252 35390
  00363 32778 55307 38460 98770 69381 04583 49299 24453 98108
  00501 13805 58930 65095 77700 15400 64140 27629 13600 64204
  35614 80324 08338 94773 49088 74710 63487 49879 50221 28572
  26289 58182 69677 65002 35617 02684 07314 44201 18482 06548
  22006 56946 07257 43942 88201 59601 86877 78050 26672 41196
  40938 01010 03888 97470 09155 48494 13001 18695 21687 89279
  49353 72663 72182 08898 76004 86400 00000 00000 00000 00000（通り）
```

です。ちなみにこれは 378 桁の数です。
どうやらこれで夫婦をあきらめずに済んだようです $\cdots$。

コメント

この問題の解を、集合と排除の論理を最後まで使って、求めることができました。

同じように集合と排除の論理をがりがりと使って計算していくものには、完全順列 (別名：攪乱順列）があり、n 個の完全順列は $!n$ と表します。これは n 人がプレゼント交換をするときに、全員が自分以外のプレゼントをもらう時の順列として計算できます。ちなみにこれは、

$$!n = \sum_{k=0}^{n} \underline{(-1)^k} \cdot {}_n\mathrm{C}_k \cdot (n-k)! \quad \text{(通り) です。}$$

今回の解は、(完全順列)−(完全順列) の形に似ていますが、上の下線部が $(-1)^k$ ではなくて $(-2)^k$ ですので、完全順列の亜系、とでも言いましょうか。

「完全な完全順列」だったら、$!n$ を使ってもう少し簡潔に書けたのに $\cdots$ と悔やまれるところであります。