- 学校で出た問題です。2004 年度日本数学オリンピックの予選問題だそうです。

【問題】

$$7m + 3n = 10^{2004}$$

となる正整数の組 (m, n) で、$\dfrac{n}{m}$ が整数となるのはいくつあるか。

解

$\dfrac{n}{m}$ が整数となるから、n は m の倍数。 …… ①

また、題意より、m, n は自然数 …… ②

①②より、n は自然数 k を用いて、次のようにおける。

$$n = km \quad \cdots\cdots ③$$

題意より、

$$7m + 3n = 10^{2004} \quad \cdots\cdots ④$$

③④より、

$$\begin{aligned} & 7m + 3km = 10^{2004} \\ \iff & (7 + 3k)m = 10^{2004} \end{aligned} \quad \cdots\cdots ⑤$$

k は自然数より、

$$\begin{aligned} & k \geqq 1 \\ \iff & 7 + 3k \geqq 10 \end{aligned} \quad \cdots\cdots ⑥$$

③⑤より、10^{2004} を素因数分解すれば、

$$10^{2004} = 2^{2004} \cdot 5^{2004}$$

となるから、

$$7 + 3k = 2^p \cdot 5^q \quad (p, q \text{ は } 0 \text{ 以上 } 2004 \text{ 以下の整数}) \quad \cdots\cdots ⑦$$

$$⑦ \iff k = \frac{2^p \cdot 5^q - 7}{3}$$

よって、k は自然数より、$2^p \cdot 5^q - 7$ が 3 で割り切れることが条件。…… ⑧

i) $p = 2p',\ q = 2q'$ と表せるとき (p', q' は 0 以上の整数)

$$2^p \cdot 5^q - 7 = 4^{p'} \cdot 25^{q'} - 7 \equiv= 1^{p'} \cdot 1^{q'} - 1 = 0 \pmod 3$$

となり、⑧をみたす。
ii) $p = 2p' + 1,\ q = 2q'$ と表せるとき (p', q' は 0 以上の整数)

$$2^p \cdot 5^q - 7 = 4^{p'} \cdot 2 \cdot 25^{q'} - 7 \equiv= 1^{p'} \cdot 2 \cdot 1^{q'} - 1 = 1 \pmod 3$$

となり、⑧をみたさない。
iii) $p = 2p',\ q = 2q' + 1$ と表せるとき (p', q' は 0 以上の整数)

$$2^p \cdot 5^q - 7 = 4^{p'} \cdot 5 \cdot 25^{q'} - 7 \equiv= 1^{p'} \cdot 5 \cdot 1^{q'} - 4 = 1 \pmod 3$$

となり、⑧をみたさない。
iv) $p = 2p' + 1,\ q = 2q' + 1$ と表せるとき (p', q' は 0 以上の整数)

$$2^p \cdot 5^q - 7 = 4^{p'} \cdot 10 \cdot 25^{q'} - 7 \equiv= 1^{p'} \cdot 10 \cdot 1^{q'} - 10 = 0 \pmod 3$$

となり、⑧をみたす。

よって、i)iv) のとき k に関する条件が満たされるから、それぞれに関して k の個数を求める。
i) のとき
⑦より、p は 0 から 2004 のうち、$p = 2p'$ とあらわせる

$$0, 2, 4, \cdots, 2002, 2004$$

の 1003 個。q も同様に 1003 個であるから、

k は 1003×1003 個。

ここで、⑥⑦より、$2^p \cdot 5^q \geqq 10$ だから、これを満たさない p, q の組

$$(p, q) = (0, 0), (2, 0)$$

の 2 つを除き、題意を満たす k は、

$1003 \times 1003 - 2$ 個。

iv) のとき
i) 同様に議論して、

k は 1002×1002 個。

ここで、$p' \geqq 0, q' \geqq 0$ より、

$$2^p + 5^q = 2^{2p'+1} + 5^{2q'+1} \geqq 2^1 + 5^1 = 10$$

であり、$2^p \cdot 5^q \geqq 10$ はみたされている。

よって題意を満たす k は、

1002×1002 個。

よって、i)iv) より、題意を満たす k の総数は、

$(1003^2 - 2) + 1002^2$個。

ここで、k, m, n は 1 対 1 に対応するから、k の個数と (m, n) の組の個数も一致して、題意を満たす (m, n) の組は、

$(1003^2 - 2) + 1002^2 = \underline{2010011(\text{個})} \cdots \boxed{\text{答}}$

$\boxed{\text{コメント}}$
答えのキリが悪いのがいただけない。