$\sqrt{a^2-a+1} = k$ （kは0以上の整数 …①）

とおける。

両辺二乗して、

$a^2-a+1 = k^2$

$\Longleftrightarrow 4a^2-4a+4 = 4k^2$

$\Longleftrightarrow (2a-1)^2-(2k)^2 = -3$

$\Longleftrightarrow (2a+2k-1)(2a-2k-1) = -3$ …②

①より、$k \geqq 0$ だから、

$2a+2k-1 \geqq 2a-2k-1$ …③

aは整数であり、kも整数だから、

$2a+2k-1$、$2a-2k-1$ ともに整数 …④

②③④より、$2a+2k-1$、$2a-2k-1$ の値としてありうるのは、次の⑤。

$(2a+2k-1,\ 2a-2k-1) = (3,\ -1),\ (1,\ -3)$ …⑤

$\Longleftrightarrow (a+k,\ a-k) = (2,\ 0),\ (1,\ -1)$

$\Longleftrightarrow (a,\ k) = (1,\ 1),\ (0,\ 1)$

となり、aが整数となって十分。

よって

（答）$\begin{cases} a=0 \text{ のとき } \sqrt{a^2-a+1} = 1 \\ a=1 \text{ のとき } \sqrt{a^2-a+1} = 1 \end{cases}$