$$\begin{cases} x+y+z=3 & \cdots ① \\ x^2+y^2+z^2=3 & \cdots ② \\ x^3+y^3+z^3=3 & \cdots ③ \end{cases}$$

② $\Leftrightarrow (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=3$

$\Leftrightarrow 3^2-2(xy+yz+zx)=3$ （①を代入）

$\Leftrightarrow xy+yz+zx=3 \cdots ④$

ここで、$xyz=k$ とおく。

このとき、解と係数の関係より、①④と合せて、x, y, z は t の3次方程式

$$t^3-3t^2+3t-k=0 \cdots ⑤$$

⑤の3解である。

⑤ $\Leftrightarrow t^3=3t^2-3t+k \cdots ⑥$

⑥に $t=x, y, z$ を代入して、

$$x^3=3x^2-3x+k \cdots ⑦$$
$$y^3=3y^2-3y+k \cdots ⑧$$
$$z^3=3z^2-3z+k \cdots ⑨$$

③に⑦⑧⑨を代入して、

$$(3x^2-3x+k)+(3y^2-3y+k)+(3z^2-3z+k)=3$$

$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2+z^2)-3(x+y+z)+3k=3$

$\Leftrightarrow 3\cdot 3-3\cdot 3+3k=3$ （①②を代入）

$\Leftrightarrow k=1 \cdots ⑩$

⑤⑩より、x, y, z は

$t^3-3t^2+3t-k=0$

$\Leftrightarrow t^3-3t^2+3t-1=0$ （$k=1$ 代入）

$\Leftrightarrow (t-1)^3=0$

$\Leftrightarrow t=1$ （三重解）

の三解だから、

$\underline{(x, y, z)=(1, 1, 1)}$ //

$$\begin{cases} x+y+z=3 & \cdots ① \\ x^2+y^2+z^2=3 & \cdots ② \\ x^5+y^5+z^5=3 & \cdots ③ \end{cases}$$

② $\Leftrightarrow (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=3$

$\Leftrightarrow 3^2-2(xy+yz+zx)=3$ （①を代入）

$\Leftrightarrow xy+yz+zx=3 \cdots ④$

ここで、$xyz=k$ とおく。

このとき、解と係数の関係より、①④と合せて、x, y, z は t の3次方程式

$$t^3-3t^2+3t-k=0 \cdots ⑤$$

⑤の3解である。

ここで、$t^5=(t^3-3t^2+3t-k)(t^2+3t+6)+(k+9)t^2+(3k-18)t+6k \cdots ⑥$

割り算実行して、

⑤⑥より、$t^5=(k+9)t^2+(3k-18)t+6k \cdots ⑦$

⑦に $t=x, y, z$ を代入して、

$$x^5=(k+9)x^2+(3k-18)x+6k \cdots ⑧$$
$$y^5=(k+9)y^2+(3k-18)y+6k \cdots ⑨$$
$$z^5=(k+9)z^2+(3k-18)z+6k \cdots ⑩$$

③に⑧⑨⑩を代入して、

$$\{(k+9)x^2+(3k-18)x+6k\}+\{(k+9)y^2+(3k-18)y+6k\}+\{(k+9)z^2+(3k-18)z+6k\}=3$$

$\Leftrightarrow (k+9)(x^2+y^2+z^2)+(3k-18)(x+y+z)+18k=3$

$\Leftrightarrow 3(k+9)+3(3k-18)+18k=3$ （①②を代入）

$\Leftrightarrow 30k=30$

$\Leftrightarrow k=1 \cdots ⑪$

⑤⑪より、x, y, z は

$t^3-3t^2+3t-1=0$

$\Leftrightarrow (t-1)^3=0$

$\Leftrightarrow t=1$ （三重解） の三解だから、

$\underline{(x, y, z)=(1, 1, 1)}$ //