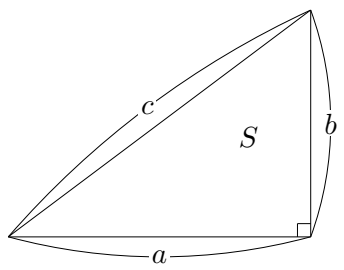
- 学校の先生に簡明な別解のやり方を教えていただいたので、せっかくなので TEX で打ち直してみます。

【問題】

a, b, c を直角三角形の 3 辺長とし、c を斜辺長とする。S はその三角形の面積とする。a, b, c, S が次式①を満たすとき、自然数 (a, b, c, S) の組は $(3, 4, 5, 6)$ に限られることを証明せよ。ただし、$a \leqq b$ である。

$$a^3 + b^3 + c^3 = S^3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



【証明】

直角三角形の成立条件より、c が斜辺長だから、

$$a + b > c \qquad \cdots ②$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \cdots ③$$

直角三角形の面積公式より、

$$S = \frac{ab}{2} \qquad \cdots ④$$

題意より、

$$a, b, c, S \text{ は自然数} \qquad \cdots ⑤$$

また、

$$a \leqq b < c \qquad \cdots ⑥$$

としても題意の直角三角形の一般性は失われない。
②⑥より、

$$c < 2b \qquad \cdots ⑦$$

①④⑦より、

$$\frac{a^3b^3}{8} = \left(\frac{ab}{2}\right)^3 = S^3 = a^3 + b^3 + c^3 < a^3 + b^3 + (2b)^3 = a^3 + 9b^3 \qquad \cdots ⑧$$

⑧より、

$$\frac{a^3b^3}{8} < a^3 + 9b^3$$
$$\iff a^3 < 8\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 72 \leqq 8 + 72 = 80 \quad (\because \text{ ⑤⑥}) \qquad \cdots ⑨$$

⑤⑨より、

$$a = 1, 2, 3, 4$$

(i) $a = 1$ のとき
①④に代入して、

$$1^3 + b^3 + c^3 = \frac{1^3b^3}{8}$$
$$\iff \frac{7}{8}b^3 + c^3 = -1$$

ここで、⑤より、左辺 $\frac{7}{8}b^3 + c^3 > 0$, 右辺 $-1 < 0$ となり、これを満たす b, c は存在しない。

(ii) $a = 2$ のとき
①④に代入して、

$$2^3 + b^3 + c^3 = \frac{2^3b^3}{8}$$
$$\iff c^3 = -8$$

ここで、⑤より、左辺 $c^3 > 0$, 右辺 $-8 < 0$ となり、これを満たす b, c は存在しない。

(iii) $a = 3$ のとき
③に代入して、

$$3^2 + b^2 = c^2$$
$$\iff (c - b)(c + b) = 3^2 \qquad \cdots ⑩$$

ここで、⑤⑥より、

$$c + b > c - b > 0 \text{ かつ } c - b,\ c + b \text{ は自然数} \qquad \cdots ⑪$$

⑩⑪より、

$$(c-b, c+b) = (1, 3^2) \iff (b, c) = (4, 5) \text{ が必要。}$$

よって、これら $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ を①に代入すると、

$$(\text{①左辺}) = a^3 + b^3 + c^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3 = 216$$

$$(\text{①右辺}) = S^3 = \frac{a^3 b^3}{8} = 6^3 = 216$$

$$S^3 = 216 \quad \therefore\ S = 6 \in (\text{自然数})$$

となり、①⑤を満たし十分。

(iv) $a = 4$ のとき
③に代入して、

$$4^2 + b^2 = c^2$$

$$\iff (c-b)(c+b) = 2^4 \qquad \cdots ⑫$$

(iii) 同様に議論して、

$$(c-b, c+b) = (1, 2^4), (2, 2^3) \iff (b, c) = \left(\frac{15}{2}, \frac{17}{2}\right), (3, 5) \text{ が必要。}$$

しかし、$\frac{15}{2}$ は自然数でないから、⑤に反して、$(b, c) = \left(\frac{15}{2}, \frac{17}{2}\right)$ は不適。また、$(b, c) = (3, 5)$ は、$a \leqq b$ に反して不適。

以上、(i)(ii)(iii)(iv) より、
①を満たす、自然数 (a, b, c, S) の組は $(3, 4, 5, 6)$ に限られる。 $\boxed{\text{証明終}}$