【問題】

a, b, c を直角三角形の三辺長とし、c を斜辺長とする。S はその三角形の面積とする。a, b, c, S が次式①をみたすとき、自然数 (a, b, c, S) の組は $(3, 4, 5, 6)$ に限らることを証せ。ただし、$a \leqq b$ である。

$$a^3 + b^3 + c^3 = S^3 \quad \cdots ①$$

【証明】

直角三角形の成立条件より、c が斜辺長だから、

$$a + b > c \quad \cdots ②$$
$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \cdots ③$$

直角三角形の面積公式より、

$$S = \frac{ab}{2} \quad \cdots ④$$

題意より、

$$a, b, c, S \text{ は自然数} \cdots ⑤$$

ここで、$a = b$ のとき、$c > 0$ だから、

③より、$c^2 = 2a^2$

$\Leftrightarrow c = \sqrt{2}a$

⑤より、左辺 c は有理数、右辺 $\sqrt{2}a$ は無理数で矛盾。よって、$a \neq b$ が必要。

これを $a \leqq b$ と合わせて、

$$a < b \quad \cdots ⑥$$

⑤より、$a + b > 0$ であり、また、⑥より、$(a-b)^2 > 0$ であるから、

$(a+b)(a-b)^2 > 0$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 - 2ab(a+b) > 0$

$\Leftarrow 2(a^3+b^3) > a^3 + b^3 + 2ab(a+b)$

$= (a^2+b^2)\cdot(a+b)$

$> c^3$ (∵②, ③)

$\Leftarrow 3(a^3+b^3) > a^3 + b^3 + c^3$

$= S^3$ (∵①)

$= \frac{a^3b^3}{8}$ (∵④)

$\Leftrightarrow a^3b^3 - 24(a^3+b^3) < 0$

$\Leftrightarrow (a^3-24)(b^3-24) < 576 \quad \cdots ⑦$

i) $a = 1$ のとき、

①④に代入して、

$1 + b^3 + c^3 = \frac{1 \cdot b^3}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{7}{8}b^3 + c^3 = -1$

⑤より、左辺 $\frac{7}{8}b^3 + c^3$ は正、右辺は負であり、矛盾

ii) $a = 2$ のとき、

①④に代入して、

$8 + b^3 + c^3 = \frac{8 \cdot b^3}{8}$

$\Leftrightarrow c^3 = -8$

⑤より、左辺 c^3 は正、右辺は負であり、矛盾。

iii) $a \geqq 3$ のとき、

$a^3 \geqq 27 \Leftrightarrow a^3 - 24 \geqq 3 > 0$

であり、また、⑥より、

$b^3 - 24 > a^3 - 24$ だから、

$0 < a^3 - 24 < b^3 - 24 \quad \cdots ⑧$

⑦⑧より、$0 < a^3 - 24 < \sqrt{576} = 24$

$\therefore a^3 < 48 < 64 = 4^3 \quad \cdots ⑨$

⑤⑨より、$a < 4$

$a \geqq 3$ と合わせて、$a = 3 \quad \cdots ⑩$

⑦⑩より、

$(3^3 - 24)(b^3 - 24) < 576$

$\Leftrightarrow b^3 < 216 = 6^3$

$a = 3$、$a < b$ と合わせて、$b = 4, 5$

しかし、$b = 5$ のとき、$a = 3$ と③に代入すると、

$c = \sqrt{34}$ となり、⑤に反する。

よって、$b = 4$ が必要。 $\cdots ⑪$

⑩⑪と③④に代入して、$c = 5$、$S = 6$ ⑤をみたす

このとき、$a^3 + b^3 + c^3 = 216$

$S^3 = 216$ となり、①をみたして十分。

以上 i) ii) iii) より、題意をみたす (a, b, c, S) の組は $(3, 4, 5, 6)$ に限らることが示された。

(証明終)