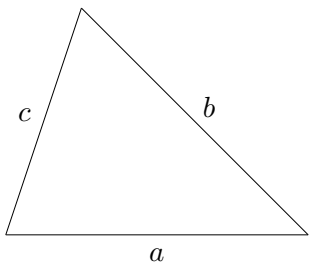
- これは学校で出た課題です … 。せっかくなので TEX をつかってきれいにうちなおしてみました。

問

三辺 a, b, c の三角形において、以下が成立する事を証せよ。

$$\frac{3}{2} \leq \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} < 2$$



- まずは左の不等号 $\frac{3}{2} \leq \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$ を示していきます。

解

三角不等式より、

$$\begin{cases} 0 < a < b + c \\ 0 < b < c + a \\ 0 < c < a + b \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

また、

$$\begin{cases} b + c = A \\ c + a = B \\ a + b = C \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

とおける。

(1)(2) より、

$$\begin{cases} \frac{A}{B}, \frac{B}{A} > 0 \\ \frac{B}{C}, \frac{C}{B} > 0 \\ \frac{C}{A}, \frac{A}{C} > 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

(3) より、相加相乗平均の関係より、

$$\begin{cases} \dfrac{A}{B}+\dfrac{B}{A} \geq 2\sqrt{\dfrac{A}{B}\times\dfrac{B}{A}}=2 \\ \dfrac{B}{C}+\dfrac{C}{B} \geq 2\sqrt{\dfrac{B}{C}\times\dfrac{C}{B}}=2 \\ \dfrac{C}{A}+\dfrac{A}{C} \geq 2\sqrt{\dfrac{C}{A}\times\dfrac{A}{C}}=2 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

(等号成立はそれぞれ $\dfrac{A}{B}=\dfrac{B}{A}, \dfrac{B}{C}=\dfrac{C}{B}, \dfrac{C}{A}=\dfrac{A}{C}$ だから $A=B, B=C, C=A$)

(4) より、

$$(\frac{A}{B}+\frac{B}{A})+(\frac{B}{C}+\frac{C}{B})+(\frac{C}{A}+\frac{A}{C}) \geq 6 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

(等号成立は $A=B=C$)

また、

$$\begin{aligned} &\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a} \\ &=\frac{\frac{A+B+C}{2}-C}{C}+\frac{\frac{A+B+C}{2}-A}{A}+\frac{\frac{A+B+C}{2}-B}{B} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥ \\ &=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[(\frac{A}{B}+\frac{B}{A})+(\frac{B}{C}+\frac{C}{B})+(\frac{C}{A}+\frac{A}{C})] \end{aligned}$$

(5)(6) より、

$$\begin{aligned} &\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a} \\ &\geq -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times 6=\frac{3}{2} \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

- 次に右の不等号 $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}<2$ を示していきます。

ここで、c が最長辺だと仮定すれば $0 < a', b' \leq 1$ たる a', b' を用いて、

$$\begin{cases} a = a'c \\ b = b'c \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

と表せる。

このとき、$0 < a', b' \leq 1$ より、
$a'^3 \leq a'$、$b'^3 \leq b'$ であるから、
$0 < a'^3 + b'^3 \leq a' + b'$。
よって、$\dfrac{a'^3 + b'^3}{a' + b'} \leq 1$
これを変形して

$$\begin{aligned}
&\frac{a'^3 + b'^3}{a' + b'} \leq 1 \\
\iff\ &\frac{(a'^2 - a'b' + b'^2)(a' + b')}{a' + b'} \leq 1 \\
\iff\ &a'^2 - a'b' + b'^2 \leq 1 \\
\iff\ &(a'^2 + a') + (b'^2 + b') - (a'b' + a' + b' + 1) \leq 0 \\
\iff\ &a'(a' + 1) + b'(b' + 1) - (a' + 1)(b' + 1) \leq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨ \\
\iff\ &\frac{a'}{b' + 1} + \frac{b'}{a' + 1} - 1 \leq 0 \\
\iff\ &\frac{a'c}{b'c + c} + \frac{b'c}{a'c + c} \leq 1 \\
\iff\ &\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} \leq 1 \ (\because (8))
\end{aligned}$$

また、(1) より、

$$\frac{c}{a + b} < 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑩$$

(9)(10) より、c が最長辺ならば
$\dfrac{c}{a + b} + \dfrac{a}{b + c} + \dfrac{b}{c + a} < 2$

であり、a, b が最長辺の場合も同様に議論する事ができるので、

$$\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} < 2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑪$$

よって (7)(11) より、

$$\frac{3}{2} \leq \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} < 2$$

（証明おわり）