- 学校の先生に結構前にいただいた問題なのですが、かなーーーーり苦戦しました。

【問題】

$$\begin{cases} x, y, z \ > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

のとき、

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

を証明しなさい。

【指針】
とりあえず文字が三つあるので減らします。
その減らし方なんですが …

1. 「対称式は基本対称式で表せ」

   基本対称式の一つ $x + y + z$ が与えられていることに着目。残りの二つを文字でおこう。(→【本証】)

2. 「とりあえず 1 文字消去」

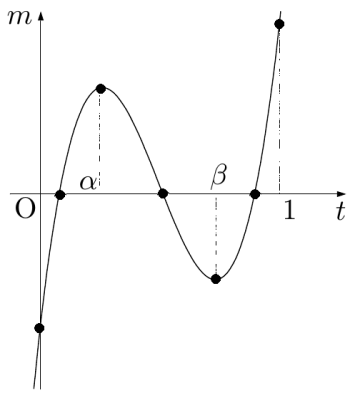
   $z = 1 - x - y$ をとりあえず与式に代入する。(→【別証】)

ふつうは、1. のほうが楽です。

【本証】
$a = xy + yz + zx,\ b = xyz$ とおくと、$xyz = 1$ だから、解と係数の関係より x, y, z は t の三次方程式①の解。

$$f(t) = t^3 - t^2 + at - b = 0 \qquad \cdots ①$$

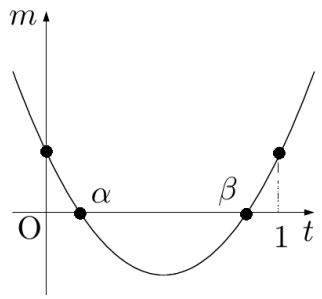
①が、$0 < t < 1$ に重解含めて 3 解をもつ条件は次の $\boxed{1}$ かつ $\boxed{2}$ かつ $\boxed{3}$。



$\boxed{1}$ $f'(t) = 0$ が実数解 α, β をもつ $(0 < \alpha \leqq \beta < 1)$
$\boxed{2}$ $f(\alpha)f(\beta) \leqq 0$
$\boxed{3}$ $f(1) > 0,\ f(0) < 0$

$\boxed{1}$ について

$$f'(t) = 3t^2 - 2t + a$$



$f'(t)=0$ が $0<t<1$ に２解（重解含む）を持つ条件は、以下②かつ③かつ④。
判別式を D として、

$$D \geqq 0 \iff a \leqq \frac{1}{3} \qquad \cdots ②$$

端点について

$$f'(0)>0 \iff a>0 \qquad \cdots ③$$

$$f'(1)>0 \iff a>-1 \qquad \cdots ④$$

軸について
$m=f'(t)$ の軸は $t=\dfrac{1}{3}$ であり、$0<t<1$ を満たす。

以上より、

$$0<a \leqq \frac{1}{3} \qquad \cdots ⑤$$

$\boxed{2}$について
解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{2}{3} \\ \alpha\beta=\dfrac{a}{3} \end{cases} \qquad \cdots ⑥$$

また、

$$f(t)=\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}\right)f'(t)+\left(\frac{2}{3}a-\frac{2}{9}\right)t+\left(\frac{1}{9}a-b\right) \qquad \cdots ⑦$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\beta) &= \left\{\left(\frac{2}{3}a-\frac{2}{9}\right)\alpha+\left(\frac{1}{9}a-b\right)\right\}\left\{\left(\frac{2}{3}a-\frac{2}{9}\right)\beta+\left(\frac{1}{9}a-b\right)\right\} \ (\because ⑦,\ f'(\alpha)=f'(\beta)=0) \\ &= \left(\frac{2}{3}a-\frac{2}{9}\right)^2\cdot\frac{a}{3}+\left(\frac{1}{9}a-b\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{9}a-b\right)^2 \leqq 0 \ (\because ⑥) \end{aligned}$$

$$\iff b^2+\frac{-18a+4}{27}b+\frac{4a^3-a^2}{27} \leqq 0$$

$$\iff \frac{9a-2-2(1-3a)^{\frac{3}{2}}}{27} \leqq b \leqq \frac{9a-2+2(1-3a)^{\frac{3}{2}}}{27} \qquad \cdots ⑧$$

ここで、

$$\frac{d}{da}\{9a-2-2(1-3a)^{\frac{3}{2}}\}=9(1+\sqrt{1-3a}) \qquad \cdots ⑨$$

$$\frac{d^2}{da^2}\{9a-2-2(1-3a)^{\frac{3}{2}}\}=-\frac{27}{2\sqrt{1-3a}} \qquad \cdots ⑩$$

であり、$0 < a \leqq \dfrac{1}{3}$ の範囲での $K_1(a) = \dfrac{9a - 2 - 2(1-3a)^{\frac{3}{2}}}{27}$ の凹凸増減表は下図。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$
⑨		$+$	
⑩		$-$	
$K_1(a)$	$-\dfrac{4}{27}$	↱	$\dfrac{1}{27}$

また、

$$\frac{d}{da}\{9a - 2 + 2(1-3a)^{\frac{3}{2}}\} = 9(1 - \sqrt{1-3a}) \qquad \cdots ⑪$$

$$\frac{d^2}{da^2}\{9a - 2 + 2(1-3a)^{\frac{3}{2}}\} = \frac{27}{2\sqrt{1-3a}} \qquad \cdots ⑫$$

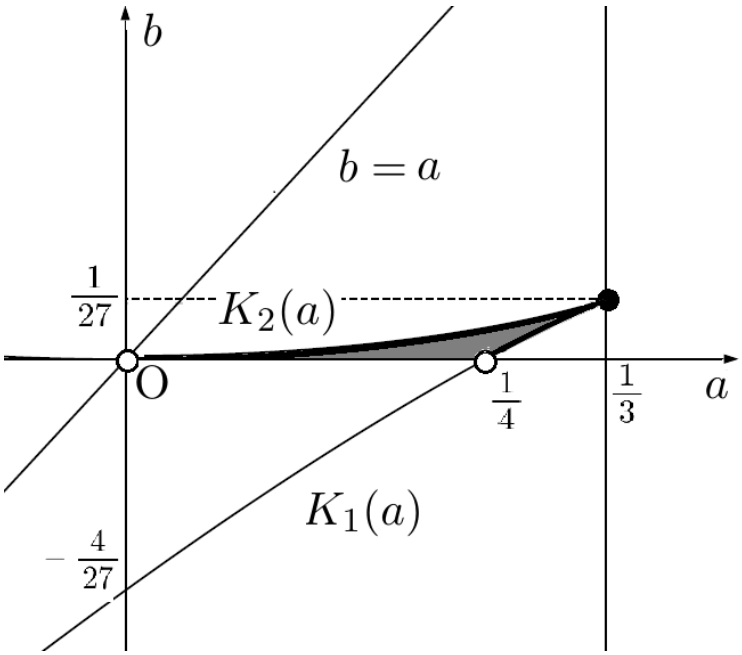
であり、$0 < a \leqq \dfrac{1}{3}$ の範囲での $K_2(a) = \dfrac{9a - 2 + 2(1-3a)^{\frac{3}{2}}}{27}$ の凹凸増減表は下図。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$
⑪		$+$	
⑫		$+$	
$K_2(a)$	0	⤴	$\dfrac{1}{27}$

$\boxed{3}$について

$$\begin{cases} f(0) < 0 \iff b > 0 \\ f(1) > 0 \iff a > b \end{cases} \qquad \cdots ⑬$$

以上より、⑤⑧⑬の範囲を図示して、下図灰色の部分。(ただし、境界端点について、黒丸、太線部は含み、白丸、細線部は含まない)



ここで、

$$\frac{2}{3}-\frac{7}{3}a+3b=k$$

とおく。これを変形して

$$b=\frac{7}{9}a+\frac{1}{3}k-\frac{2}{9} \qquad \cdots ⑭$$

⑭のグラフの傾きは正であり、$K_1(a)$ のグラフは上凸で単調増、$K_2(a)$ のグラフは下凸で単調増であるから(⑤の範囲において)、グラフより、⑭のグラフが上図領域と共有点を持つ条件を調べるためには、次の３つを調べれば十分である。

i)⑭が $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{27}\right)$ を通るとき
⑭に代入して、$k=0$

ii)⑭が $\left(\frac{1}{4},0\right)$ を通るとき
⑭に代入して、$k=\frac{1}{12}$

iii)⑭が $(0,0)$ を通るとき
⑭に代入して、$k=\frac{2}{3}$

以上 i)ii)iii) とグラフより、

$$0 \leqq k < \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \frac{2}{3}-\frac{7}{3}a+3b \geqq 0 (\because ⑭)$$

$$\iff 1\cdot(1^2-3a)+3b \geqq \frac{1^2-2a}{3}$$

$$\iff (x+y+z)\left\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right\}+3xyz \geqq \frac{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)}{3}$$

$$\iff x^3+y^3+z^3 \geqq \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

$$\left(\text{等号成立は、} a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{27} \iff x=y=z=\frac{1}{3}\right)$$

(証明終わり)

さて、【別証】は、(ガチの) 一文字消去です。
【本証】で証明した翌日、なぜかめんどくさそうなこいつをやってみたくなった … 。
そうすると、なんと【本証】よりも楽だった !!!
こつを１ついうと、大小関係を設定してやることで考える量を減らすことくらいですか。

【別証】

【問題再掲】

$$\begin{cases} x, y, z \ > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \cdots ①$$

のとき、

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

を証明しなさい。

$x \leqq y \leqq z$ と設定する。すると、①より、

$$\begin{cases} 0 < x \leqq \dfrac{1}{3} \\ 0 < y < \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \cdots ②$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&x^3 + y^3 + z^3 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \\
&= (x + y + z)\left\{(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)\right\} + 3xyz - \frac{(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)}{3} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{7}{3}(xy + yz + zx) + 3xyz \ (\because \ ①) \\
&= \frac{1}{3}\left\{2 - 7(x + y - xy - x^2 - y^2) + 9(xy - x^2y - xy^2)\right\} \ (\because \ ①) \\
&= \frac{1}{3}\left\{(-9y + 7)x^2 + (-9y^2 + 16y - 7)x + 7y^2 - 7y + 2\right\} \qquad \cdots ③
\end{aligned}$$

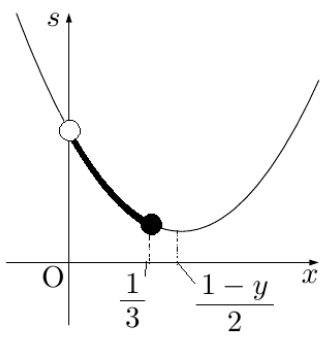
となる。また、

$$k(x) = (-9y + 7)x^2 + (-9y^2 + 16y - 7)x + 7y^2 - 7y + 2 \qquad \cdots ④$$

とおく。
②より、$-9y + 7 > 0$ だから、x の二次関数 $s = k(x)$ のグラフの軸は、

$$-\frac{-9y^2 + 16y - 7}{2(-9y + 7)} = \frac{1 - y}{2}$$

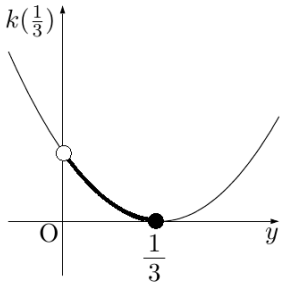
i) $\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{1 - y}{2} \iff 0 < y \leqq \dfrac{1}{3}$ $(\because$ ②$)$ のとき



グラフより、k 最小の時、$x=\dfrac{1}{3}$。④より、

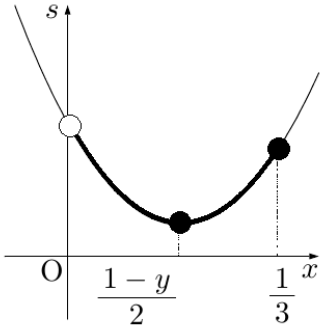
$$\begin{aligned} k\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{9}(-9y+7)+\frac{1}{3}(-9y^2+16y-7)+7y^2-7y+2 \\ &= 4\left(y-\frac{1}{3}\right)^2 \qquad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

⑤を図示して、下図。



よって、$0<y\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき、$k_{min}=0$ $\left(x=y=\dfrac{1}{3}\right)$

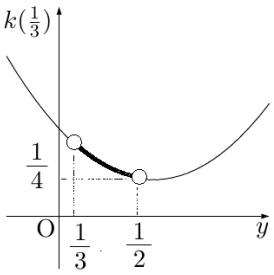
ii) $0<\dfrac{1-y}{2}<\dfrac{1}{3} \iff \dfrac{1}{3}<y<\dfrac{1}{2}$ ($\because$ ②) のとき



グラフより、k 最小の時、$x=\dfrac{1-y}{2}$。④より、

$$\begin{aligned} k\left(\frac{1-y}{2}\right) &= 7y^2-7y+2 \\ &= 7\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \qquad \cdots ⑥ \end{aligned}$$

⑥を図示して、下図。



よって、グラフより、$\dfrac{1}{3}<y<\dfrac{1}{2}$ のとき、$k(x)$ はつねに $\dfrac{1}{4}$ よりも大きい。

以上 i)ii) より、$k(x) \geqq 0$ (等号は $x = y = \dfrac{1}{3}$ かつ① $\iff x = y = z = \dfrac{1}{3}$ のとき成立) $\cdots$⑦

③④⑦より、

$$x^3 + y^3 + z^3 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geqq 0$$

$$\iff x^3 + y^3 + z^3 \geqq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

$$\left(\text{等号成立は } x = y = z = \frac{1}{3}\right)$$

(証明終わり)

【コメント】
工夫して対称式使うよりガチで一文字消去したほうが楽って $\cdots$ いただけないですね〜。
まあ、【別証】は x については二次関数になるから楽なんでしょうけど。
【本証】も二次導関数をとるあたりでかなーりやばいんで工夫したことになってないのかも。
はあ $\cdots$。

【後日談】

鉄のとみー先生に相談してみたところ、すーぱーはいてく解法をゲットできました。コーシーシュワルツをつかえばすぐ、なんだとか。でもその使い方がすごい。こりゃ思いつかないなぁ

【ほんとの本証】

【問題再掲】

$$\begin{cases} x, y, z \ > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \cdots ①$$

のとき、

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

を証明しなさい。

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 &= (x^3 + y^3 + z^3)(x + y + z) \quad (\because ①) \\
&= \left\{ \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(y^{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(z^{\frac{3}{2}}\right)^2 \right\} \left\{ \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2 \right\} \\
&\geqq \left(x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (\because \text{コーシーシュワルツの不等式}) \\
&= (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{1}{3}(1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\
&\geqq (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \frac{1}{3}(1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z)^2 \quad (\because \text{コーシーシュワルツの不等式}) \\
&= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \cdot (x + y + z)^2 \\
&= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \quad (\because ①)
\end{aligned}$$

等号成立は、$x^{\frac{3}{2}} : y^{\frac{3}{2}} : z^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}} : y^{\frac{1}{2}} : z^{\frac{1}{2}}$ かつ $1 : 1 : 1 = x : y : z$ かつ ① $\iff x = y = z = \dfrac{1}{3}$

(証明終わり)