問

n 個の均質な物体を３つの名前のついていない組にわけるとき、その分け方は何通りあるか。ただしどの組にも少なくとも一つの物体が入るものとする。

指針

- まず考えるんだけど、３つの組に A、B、C、と名前がついていたら簡単だよね。

- そう、重複組み合わせの基本問題ですね！一応解説しておくと、$n-1$ 個の間の中から、２つの仕切りが入る場所をきめれば、区切られた一番左の部分が A、真中が B、右が C として１対１に対応するので、${}_{n-1}\mathrm{C}_2$　通り。

- そこで、組の名前をとることを考えるのです $\cdots$。しかしこれはそう一筋縄にいくものではなくて、場合分けが生じるのです。たとえば $\cdots$
  - 三つの数字が、$1,2,3$ だったとき、$(A,B,C)=(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)$ の６通りがあるから、名前をとるには６で割る。
  - 三つの数字が、$1,4,4$ だったとき、$(A,B,C)=(1,4,4),(4,1,4),(4,4,1)$ の３通りがあるから、名前をとるには３で割る。
  - 三つの数字が、$2,2,2$ だったとき、$(A,B,C)=(2,2,2)$ の１通りしかないから、名前をとるには１で割る。

- 要は、１個も数字が一致していなければ６で割り、２個数字が一致していれば３で割り、３個とも一致していれば１で割るのです。ただ $\cdots$「これらを場合分けすればできる。さあ、解答を書くぞー、」とすると大変なことになってしまうのです。

- すぐにわかると思うけれども、３個一致があるかどうかは、n の値によりけりなのです。n が３の倍数だったら平和だけど、３の倍数でない場合は別枠で考える必要があるわけだね。でも罠はこれだけではない $\cdot\cdot$

- ２個一致の個数も、n の値によりけりなのです。
  - n が奇数のとき、三つの数字 $=(1,1,n-2),(2,2,n-4),\cdots,(\dfrac{n-1}{2},\dfrac{n-1}{2},1)$ の $\dfrac{n-1}{2}$ 個

＊ たとえば $n=11$ なら、三つの数字 $=(1,1,9),(2,2,8),\cdots,(5,5,1)$ の５個

－ n が偶数のとき、三つの数字 $=(1,1,n-2),(2,2,n-4),\cdots,(\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1,2)$ の $\frac{n}{2}-1$ 個

＊ たとえば $n=12$ なら、三つの数字 $=(1,1,10),(2,2,8),\cdots,(5,5,2)$ の５個

- 結局、２の倍数かどうか、さらに３の倍数かどうかで数が変わってきてしまうわけだ。よって、６の剰余系で場合分けをしていくことになるのです。
- この場合分けによって、２個一致、３個一致の個数が決まるから、１個一致の個数も、${}_{n-1}\mathrm{C}_2$－（２個一致の個数）×3－（３個一致の個数）を６で割れば解決。
- まあ、結論をいうと、めっちゃ面倒。でも答えはきれいなので …
- あと気を付けるべきは、n が３の倍数だと、２個一致の中に３個一致が紛れ込んでるので注意ですね。

$\boxed{\text{解}}$

三つの組を順に A,B,C と区別すれば、n 個の均質な物体を一列に並べ、その間の n-1 個から、仕切りの入る２個を選ぶ組み合わせに対応するから、

$$ {}_{n-1}\mathrm{C}_2\text{個} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① $$

である。

I)$n\equiv 0(mod6)$ のとき

(i)$A=B=C$ となる数の組み合わせ
$(A,B,C)=(\frac{n}{3},\frac{n}{3},\frac{n}{3})$ の１通りである。

(ii)$A=B,\neq C$ となる数の組み合わせ
$(A,B,C)=(1,1,n-2),(2,2,n-4),\cdots,(\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}-1,2)$ の $\frac{n}{2}-1$ 通りのうち、
$A=B=C$ となる $(\frac{n}{3},\frac{n}{3},\frac{n}{3})$ をのぞいた $\frac{n}{2}-2$ 通り。
これは $B=C,\neq A$ のとき,$C=A,\neq B$ のときについても同様。

(iii)$A \neq B \neq C$ となる数の組み合わせ
(i)(ii)①より、${}_{n-1}\mathrm{C}_2 - 3(\frac{n}{2} - 2) - 1$ 通り。

よって、名前をとるとき、(iii) について、A,B,C の順番の考慮を除くから、$3! = 6$ で割って、

$$\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 - 3(\frac{n}{2} - 2) - 1}{6} + (\frac{n}{2} - 2) + 1 = \frac{n^2}{12}\,(\text{通り}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

II)$n \equiv 1, 5 (mod 6)$ のとき

(i)$A = B = C$ となる数の組み合わせ
これは存在しない。

(ii)$A = B, \neq C$ となる数の組み合わせ
$= (1, 1, n-2), (2, 2, n-4), \cdots, (\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)$ の $\frac{n-1}{2}$ 通り
これは $B = C, \neq A$ のとき,$C = A, \neq B$ のときについても同様。

(iii)$A \neq B \neq C$ となる数の組み合わせ
(i)(ii)①より、${}_{n-1}\mathrm{C}_2 - 3(\frac{n-1}{2})$ 通り。

よって、名前をとるとき、(iii) について、A,B,C の順番の考慮を除くから、$3! = 6$ で割って、

$$\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 - 3(\frac{n-1}{2})}{6} + \frac{n-1}{2} = \frac{n^2}{12} - \frac{1}{12}\,(\text{通り}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

III)$n \equiv 2, 4 (mod 6)$ のとき

(i)$A = B = C$ となる数の組み合わせ
これは存在しない。

(ii)$A = B, \neq C$ となる数の組み合わせ
$(A, B, C) = (1, 1, n-2), (2, 2, n-4), \cdots, (\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 1, 2)$ の $\frac{n}{2} - 1$ 通り
これは $B = C, \neq A$ のとき,$C = A, \neq B$ のときについても同様。

(iii)$A \neq B \neq C$ となる数の組み合わせ
(i)(ii)①より、${}_{n-1}\mathrm{C}_2 - 3(\frac{n}{2} - 1)$ 通り。

よって、名前をとるとき、(iii) について、A,B,C の順番の考慮を除くから、$3! = 6$ で割って、

$$\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 - 3(\frac{n}{2} - 1)}{6} + \frac{n}{2} - 1 = \frac{n^2}{12} - \frac{1}{3}\,(\text{通り}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

IV)$n \equiv 3(mod6)$ のとき

(i)$A = B = C$ となる数の組み合わせ
$(A, B, C) = (\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3})$ の 1 通りである。

(ii)$A = B, \neq C$ となる数の組み合わせ
$(1, 1, n-2), (2, 2, n-4), \cdots, (\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)$ の $\frac{n-1}{2}$ 通りのうち、
$A = B = C$ となる $(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3})$ の 1 通りをのぞいた $\frac{n-3}{2}$ 通り。
これは $B = C, \neq A$ のとき,$C = A, \neq B$ のときについても同様。

(iii)$A \neq B \neq C$ となる数の組み合わせ
(i)(ii)①より、${}_{n-1}\mathrm{C}_2 - 3(\frac{n-3}{2}) - 1$ 通り。

よって、名前をとるとき、(iii) について、A,B,C の順番の考慮を除くから、$3! = 6$ で割って、

$$\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 - 3(\frac{n-3}{2}) - 1}{6} + \frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n^2}{12} + \frac{1}{4}\,(\text{通り}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

以上②③④⑤より、

$$\begin{cases} \frac{n^2}{12}(\text{通り}) & (n \equiv 0 \quad (mod6)\ \text{のとき}) \\ \frac{n^2}{12} - \frac{1}{12}\,(\text{通り}) & (n \equiv 1, 5(mod6)\ \text{のとき}) \\ \frac{n^2}{12} - \frac{1}{3}\,(\text{通り}) & (n \equiv 2, 4(mod6)\ \text{のとき}) \\ \frac{n^2}{12} + \frac{1}{4}\,(\text{通り}) & (n \equiv 3 \quad (mod6)\ \text{のとき}) \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑥ $\Longleftrightarrow$ $\underline{\dfrac{n^2}{12}\text{ の小数点以下を四捨五入した値（通り）}}$ $\cdots$ 答

コメント 四捨五入でいいというのがとってもうれしいにゃあ。